



Etape locală (OLM), Caraș – Severin, 07.02.2026. Clasa a VIII-a

-Barem de notare și evaluare-

Problema 1. (22 de puncte)

Fie mulțimile:

$$A = \left\{ y \mid y = 3x + 2, \sqrt{(2x-3)^2} \leq 5, x \in \mathbb{R} \right\} \text{ și } B = \left\{ z \mid z = 2x + 3, \sqrt{(x+2)^2} < 3, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) Determinați mulțimile A și B .
b) Demonstrați că suma numerelor întregi din mulțimea $A \cap B$ este pătrat perfect.

Prof. Rădoi Mirela Camelia

Soluție:

a) $\sqrt{(2x-3)^2} \leq 5 \Rightarrow 2x-3 \leq 5 \Rightarrow -1 \leq x \leq 4$	4p
$-1 \leq 3x-2 \leq 14 \Rightarrow -1 \leq y \leq 14 \Rightarrow A = [-1, 14]$	4p
$\sqrt{(x+2)^2} < 3 \Rightarrow x+2 < 3 \Rightarrow -5 < x < 1$	4p
$-7 < 2x+3 < 5 \Rightarrow -7 < z < 5 \Rightarrow B = (-7, 5)$	4p
b) $A \cap B = [-1, 5)$	2p
$A \cap B \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$	2p
$-1+0+1+2+3+4-9 = 3^2$	2p

Problema 2. (23 de puncte)

Dacă $x = \sqrt{\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}}$ și $y = \sqrt{\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}$, calculați:

- a) suma și produsul numerelor x și y .
b) numărul real $a = x^{10} - x^8 + x^4 + x^2 + y^{10} - y^8 + y^4 + y^2$

(Supliment GM 11/2025, enunț ușor modificat)
Neculai Stanciu, Buzău

Soluție:

a) $x = \sqrt{\frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$	2p
$x = \sqrt{\frac{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$	2p
$x + y = \sqrt{7}; x \cdot y = 1$	4p
b) $x + y = \sqrt{7} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$	2p
$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^4 + y^4 = 23$	2p
$x^4 + y^4 = 23 \Rightarrow x^8 + y^8 = 527$	2p



$$(x^2 + y^2)^3 = 5^3 \Rightarrow x^6 + y^6 = 110$$

3p

$$(x^2 + y^2)(x^8 + y^8) = 5 \cdot 527 \Rightarrow x^{10} + y^{10} + x^6 + y^6 = 2635$$

$$x^{10} + y^{10} = 2525$$

3p

$$a = (x^{10} + y^{10}) - (x^8 + y^8) + (x^4 + y^4) + (x^2 + y^2)$$

$$a = 2525 - 527 + 23 + 5 = 2026$$

3p

Problema 3. (22 de puncte)

Fie triunghiul echilateral ABC , cu $AB = 6 \text{ cm}$. Se duc AM și BN perpendiculare pe planul (ABC) , unde M și N sunt de o parte și de alta a planului (ABC) , cu $AM = 8 \text{ cm}$ și $BN = 1 \text{ cm}$.

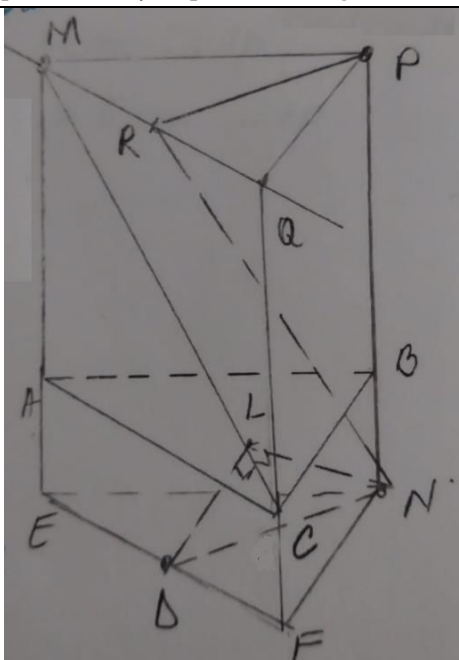
Prin M se duce dreapta d paralelă cu AC . Calculați:

- Distanța de la punctul N la dreapta d ;
- Distanța de la N la dreapta MC .

(enunț ușor modificat,
prof. Dorin Arventiev, Constanța)

Soluție:

- Completăm figura pentru a obține prisma triunghiulară regulată $ABCMQP$, $Q \in d$.



$$NB \perp (ABC), (ABC) \parallel (MPQ) \Rightarrow NP \perp (MPQ)$$

2p

Fie R mijlocul lui MQ , cu teorema celor trei perpendiculare rezultă că

$$NR \perp MQ \Rightarrow d(N, MQ) = NR$$

4p

$$PR = 3\sqrt{3} \text{ cm}, NR = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

4p

- Completăm figura pentru a obține prisma triunghiulară regulată $ABCNEF$,
 $(MAC) = (MEF)$.

Fie D mijlocul lui EF , demonstrăm că $ND \perp (MEF)$

2p

Cu teorema celor trei perpendiculare $ND \perp (MEF)$, fie



$DL \perp MC, L \in MC, DL, MC \subset (MEF) \Rightarrow NL \perp MC \Rightarrow d(N, MC) = NL$	3p
$MC = 10 \text{ cm}, MEFC \text{ trapez dreptunghic}, A_{MEFC} = 30 \text{ cm}^2$	2p
$A_{\triangle MED} = \frac{27}{2} \text{ cm}^2, A_{\triangle DCF} = \frac{3}{2} \text{ cm}^2, A_{\triangle MDC} = 15 \text{ cm}^2$	3p
$A_{\triangle MDC} = \frac{MC \cdot DL}{2} \Rightarrow DL = 3 \text{ cm}$	1p
$\triangle NLD, \angle NDL = 90^\circ \Rightarrow NL = 6 \text{ cm}$	1p

Problema 4. (23 de puncte)

Fie $ABCD A' B' C' D'$ o prismă patrulateră regulată dreaptă cu $AB = 6 \text{ cm}, AA' = 12 \text{ cm}$ și punctele M și N mijloacele muchiilor CC' respectiv CD . Notăm $BD \cap AN = \{E\}$ și $CD' \cap DM = \{F\}$.

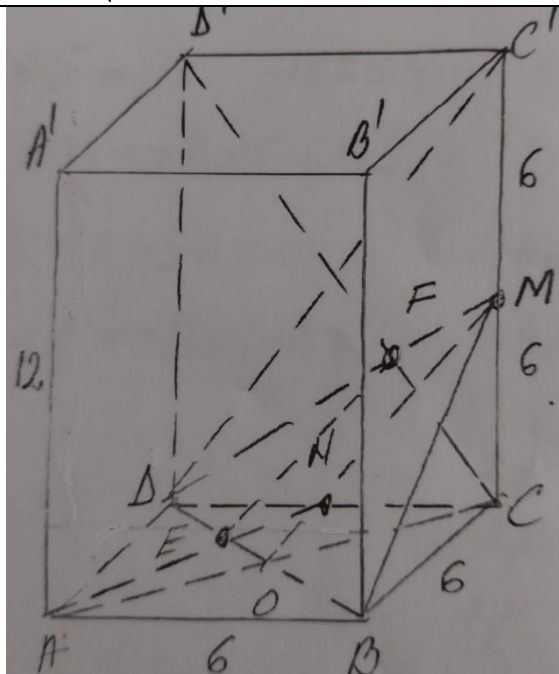
- Determinați aria triunghiului DEF ;
- Demonstrați că $EF \parallel (ACC')$

(prof. Rădoi Mirela Camelia)

Soluție:

a) $BD = BM = DM = 6\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \triangle MBD \text{ echilateral}$

3p



$$\triangle DEN \sim \triangle BEA \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

3p

$$\triangle CMF \sim \triangle D'DF \Rightarrow \frac{MF}{DF} = \frac{1}{2} \Rightarrow DF = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

3p

$$A_{\triangle DEF} = \frac{DE \cdot DF \cdot \sin \angle BDM}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

3p



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



b) $\frac{DF}{DM} = \frac{2}{3}; \frac{DE}{DO} = \frac{2}{3}$	5p
$\frac{DF}{DM} = \frac{DE}{DO}$ <small>Reciproca Teoremei lui Thales</small> $\Rightarrow EF \parallel MO$	3p
$EF \parallel MO$ și $MO \subset (ACC') \Rightarrow EF \parallel (ACC')$	3p